Wittgenstein e a Natureza da Prova Matemática

Descrição Detalhada

Alexandre Noronha Machado

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

1. Documento de Descrição Detalhada

I. OBJETIVO GERAL

Analisar e avaliar criticamente a concepção wittgensteiniana de prova matemática exposta principalmente em duas de suas obras maduras póstumas: as *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* e as *Lições sobre os Fundamentos da Matemática* (que são anotações de alunos).

II. NATUREZA DO PROBLEMA

A presente pesquisa visa tratar de um problema da **filosofia da matemática** que tem relações com as seguintes áreas da filosofia:

1. Filosofia da lógica

Trata-se de examinar a natureza da relação entre as premissas e a conclusão de uma prova matemática bem como a natureza da necessidade das proposições matemáticas. Além disso, faz-se necessário examinar a afirmação de Wittgenstein de que um sistema de proposições que contenha uma *contradição oculta* é "tão bom quanto ouro", o que coloca em xeque a necessidade de provas de consistência e o modo tradicional de se avaliar o valor de sistemas contraditórios de proposições.

2. Epistemologia

Trata-se de uma análise da natureza da *prova* matemática, isto é, um meio de justificar a verdade matemática. Wittgenstein se esforça para mostrar que um cálculo não é um tipo de experimento. Um problema para a sua filosofia da matemática consiste em mostrar como são possíveis os problemas matemáticos. Ele também sustenta que as provas matemáticas devem ser "abrangíveis" (*unübersehbar*), o que retira o estatuto de prova de certas construções simbólicas muito longas formuladas na notação do *Principia Mathematica* de Russell.

3. Filosofia da linguagem

Wittgenstein baseia suas análises da natureza da prova matemática fortemente na noção semântica de *critério*, na medida em que, para ele, uma prova matem ática introduz um novo critério para um conceito matemático, modificando-o. Além disso, a compreensão da concepção wittgensteiniana de prova matemática depende de uma compreensão das suas reflexões sobre o conceito de *seguir uma regra*, pois seguir os passos de uma prova matemática é seguir as regras que autorizam a transição de uma proposição matemática ou mais (as premissas) para outra (a conclusão).

4. Metafísica

Um dos objetivos das análises de Wittgenstein é mostrar que é um equívoco supor, como fazem os psicologistas ou mentalistas e platonistas, que as proposições matemáticas são verdadeiras ou falsas porque representam um tipo especial de fatos; que os numerais referem-se a entidades cujas propriedades elas possuem independentemente do nosso conhecimento; que, portanto, a verdade das proposições matemáticas é independente da nossa capacidade de reconhecê-la (se a tivermos).

III. METODOLOGIA

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, no que se refere às suas fontes. O projeto possui uma orientação histórica, na medida em que prevê uma análise da filosofia da matemática do jovem Wittgenstein, exposta principalmente no *Tractatus Logico-Philosophicus*, e de sua transformação, no assim chamado período intermediário da sua filosofia, registrada principalmente nas *Observações Filosóficas*, em *Wittgenstein e o Círculo de Viena* e na *Gramática Filosófica*. Essa abordagem se justifica porque examinar as continuidades e descontinuidades no desenvolvimento do seu pensamento é muitas vezes o único meio que possibilita identificar os alvos das suas críticas, bem como as suas justificativas para certas afirmações; conseqüentemente, é, muitas vezes, a única maneira de se interpretar corretamente suas reflexões. Uma parte essencial da pesquisa consiste no confronto das reflexões de Wittgenstein com as principais críticas e interpretações divergentes encontradas em uma porção selecionada da vastíssima literatura sobre o assunto (cf. bibliografia).

IV. ESTADO ATUAL DO CONHECIMENTO

1. *Tractatus Logico-Philosophicus*

Para o autor do *Tractatus*, os números são aspectos formais dos estágios de uma série gerada pela aplicação de uma operação formal reiterável. Os numerais não se referem a entidades que subsistem independentemente dessas operações. Eles apenas marcam estágios da aplicação sucessiva de uma operação formal reiterável.

As sentenças aritméticas, as equações, são pseudoproposições, na medida em que não expressam pensamentos, não representam nada e, portanto, não são verdadeiras ou falsas no mesmo sentido em que as proposições o são (Wittgenstein, na verdade, não as chama de verdadeiras ou falsas, mas de corretas ou incorretas). As equações apenas mostram uma igualdade de formas. Sua função é semelhante à função das tautologias, pois serve para justificar a derivação de uma proposição que contenham numerais (p.ex.: “Há sete crianças nessa sala”) de outra ou outras que contenham numerais (p.ex.: “Há quatro meninas nessa sala” e “Há três meninos nessa sala”). Essa função advém do fato de que as equações são como que regras para substituições de expressões (“4+3=7” mostra, sem dizer, que o sétimo estágio de aplicação de uma operação formal reiterável é o mesmo que o terceiro estágio após o quarto ou o quarto após o terceiro).

Para o autor do *Tractatus*, uma prova em aritmética é uma série de transformações baseadas nas regras de substituições das equações que visam mostrar, sem dizer, que uma determinada sentença é uma equação (6.24). As formas matemáticas da aritmética, para o autor do *Tractatus*, não são nem entidades mentais nem abstratas. Entretanto, a correção das equações aritméticas é independente do reconhecimento dessa correção, isto é, da prova dessa correção. Essa independência é garantida pela natureza das regras, que determinam de antemão todos os casos de sua aplicação.

Dado que números são aspectos formais de uma série gerada pela aplicação de uma operação formal reiterável, apenas um fragmento dessa série existe atualmente e, portanto, não há *infinito atual*. Quantificações sobre domínios infinitos não são acidentais e são como que regras para a construção de séries. Essa concepção da quantificação sobre domínios infinitos gera um problema para a interpretação da concepção tractariana das quantificações sobre domínios infinitos *não matemáticos*. Por um lado, essas quantificações deveriam ser proposições e, portanto, contingentes. Isso parece implicar que deveria haver um conjunto atualmente infinito. O problema aqui consiste em se compreender a diferença entre quantificações acidentais, nas quais a noção de classe desempenha um papel, e quantificações necessárias ou essenciais, nas quais a teoria das classes não desempenha nenhum papel, o que exclui os projetos fregeanos e russelianos de fundamentação da matemática (cf. *Tractatus* 6.031ss.).

2. Período Intermediário

Um dos pilares da filosofia da lógica do *Tractatus* é a tese da independência lógica das proposições elementares. Desse modo, os numerais foram excluídos das proposições elementares, pois algumas proposições em que ocorrem numerais mantêm relações lógicas entre si. O início do período intermediário de sua filosofia é marcado pela rejeição da tese da independência lógica das proposições elementares e, portanto, da concepção de número do *Tractatus*. Ele continuou reconhecendo uma relação entre a natureza dos números e a construção de séries de acordo com leis formais. Essas leis formais, entretanto, não estavam mais vinculadas à noção de forma geral da proposição.

No seu período intermediário, Wittgenstein abandonou a distinção entre dizer e mostrar. Não há nada que as sentenças matemáticas não possam dizer. A função ou uso que Wittgenstein atribuía a essas sentenças no *Tractatus*, um uso normativo, passou a constituir a sua essência. Um problema que surge aqui consiste em conciliar a concepção normativa das sentenças matemáticas com o fato de que o princípio do terceiro excluído se aplica a elas. Wittgenstein não contestava a validade geral do princípio do terceiro excluído. Sentenças que não estão de acordo com esse princípio (p.ex.: "Há uma seqüência de três setes na expansão de pi"), segundo Wittgenstein, não são proposições. O problema pode ser expresso assim: como (em que sentido) uma norma pode ser verdadeira ou falsa?

A natureza das sentenças matemáticas se revelou normativa, para Wittgenstein, devido a uma mudança no seu método de análise filosófica do conteúdo lógico das expressões relevantes. Ao invés de realizar "conjecturas a priori", ele passou a analisar o uso que se faz dessas expressões nas nossas práticas cotidianas. Por um certo tempo, ele manteve o projeto tractariano de construção de uma notação ideal, que revelaria a verdadeira natureza dos objetos do nosso discurso: os fenômenos, a experiência imediata. Nesse período, Wittgenstein acreditava, como Kant, que a natureza do número estava vinculada à natureza do tempo e do espaço (*Observações Filosóficas*, p. 130). Mais tarde, ele abandonou o projeto de construção de uma notação ideal baseado numa investigação fenomenológica e passou a adotar a análise da linguagem ordinária como método fundamental, introduzindo a noção de jogos de linguagem.

No período intermediário, Wittgenstein esboçou pela primeira vez sua concepção madura da relação entre uma proposição matemática e sua prova. "Poderíamos dizer: uma proposição matemática é uma alusão a uma prova." (*Observações Filosóficas*, p. 145, cf. 148) O sentido de uma proposição matemática é determinado pela sua prova.

3. Filosofia Madura

3.1 Jogos de Linguagem

Jogos de linguagem são instrumentos de análise lógica. São objetos de comparação (reais ou fictícios) que servem para evidenciar as regras lógicas da nossa linguagem. São fragmentos de linguagem, ou linguagens primitivas, descritas com uma ênfase nas atividades normativas que constituem o uso das expressões dessas linguagens.

3.2 Regras

Wittgenstein procura mostrar que a concepção de regra como determinante absoluto, isto é, como algo que determina de antemão todos os casos de sua aplicação (finitos ou infinitos), é equivocada. O primeiro passo nessa direção foi mostrar que certos conceitos filosoficamente relevantes, tal como “proposição” e “número”, são aplicados não com base em condições necessárias e suficientes, mas com base em “semelhanças de família”. Outro passo consistiu numa crítica à noção de significação ou entendimento (do ato de captar uma regra) implícita na concepção de regra como determinante absoluto: a noção de significação ou entendimento como uma interpretação, um ato mental extraordinário capaz de fazer coisas que nenhum ato corporal pode fazer. Seguir uma regra, segundo Wittgenstein, é engajar-se em uma prática que não possui fundamentos (cognitivos), embora não seja, em um certo sentido, arbitrária. Regras lógicas não espelham essências independentes que encontramos ou descobrimos na realidade. Numa prova matemática, portanto, não somos orientados pelo conhecimento das essências independentes de entidades matemáticas. Tampouco fazemos *descobertas* sobre o que já estava de antemão determinado independentemente do nosso conhecimento pelas regras matemáticas.

3.3 Prova matemática e critérios

A noção de critério é, para Wittgenstein, semântica e não meramente epistemológica. Os critérios determinam o significado de uma expressão lingüística. Uma prova matemática determina um novo critério para um conceito matemático. Portanto, a prova matemática modifica o conceito em questão. Por exemplo: para números muito grandes, não temos como decidir se são ou não são primos. Se elaborarmos um método de prova capaz de decidir se esses números muito grandes são primos, modificamos o conceito de número primo. O problema principal aqui é o seguinte: a proposição “*n* é um número primo”, quando *n* for um desses números muito grandes, não terá o mesmo sentido antes e depois da elaboração do novo método de prova. Além disso, qual é a relação entre os critérios antigos e os novos?

3.4 Problemas matemáticos: sentido e verdade

O sentido de uma proposição matemática é determinado, segundo Wittgenstein, pela sua prova. Isso parece implicar que, antes da elaboração da prova, a proposição matemática ou não tem sentido ou tem outro sentido. Em qualquer caso, como pode haver algo determinado que queremos provar antes de provar e que seja a mesma coisa depois de provarmos? Como pode haver problemas matemáticos, isto é, proposições cujo sentido compreendemos e cujo valor de verdade ignoramos? Se a prova modifica o sentido da proposição, então não provamos a proposição para a qual desejávamos uma prova. Se a prova dota a proposição de sentido pela primeira vez, então antes dela não havia nada determinado que queríamos provar. A resposta de Wittgenstein a essas questões envolve um questionamento da concepção tradicional de pergunta, tal como é apresentada por Frege em “A Negação”. Uma pergunta pode colocar em questão justamente se uma sentença faz sentido.

A relação entre o sentido de uma proposição matemática e sua prova implica, segundo Wittgenstein, que o sentido de uma proposição matemática é determinado pelo sistema de proposições do qual ela faz parte, pois através da prova a proposição é incorporada a um sistema. Portanto, uma mesma sentença não pode expressar a mesma proposição em dois sistemas diferentes. Isso parece se chocar com uma certa interpretação do teorema da incompletude de Gödel, segundo a qual uma mesma proposição é indemonstrável num sistema axiomático S qualquer usado para formalizar a aritmética e demonstrável num sistema metamatemático M que toma S como linguagem objeto. Sendo assim, essa proposição seria verdadeira, pois seria demonstrável em M e indemonstrável em S.

3.5 Prova matemática e necessidade

A negação de que as regras espelham essências epistemicamente independentes gera vários problemas. Por que não é arbitrário seguir outras regras lógicas? Por que não podemos inferir de qualquer modo? O que nos compele a aceitar uma prova? Como uma prova, afinal, prova alguma coisa? Segundo Wittgenstein, a prova matemática estende a matemática. A elaboração de uma prova não é a realização de uma descoberta, mas é mais semelhante a uma invenção. Essa concepção é altamente contra-intuitiva. Mas, para Wittgenstein, devemos nos ater ao uso ordinário da linguagem, não ao que os usuários da linguagem ordinária pensam sobre o seu uso.

Dado o caráter normativo das proposições matemáticas, a necessidade dessas proposições não deve ser concebida por meio da noção de mundos possíveis, mas a partir da distinção entre sentido e absurdo. (Alguns afirmam que essa é uma maneira enganadora de admitir que as proposições matemáticas não são necessárias.) A distinção entre sentido e absurdo não é determinada apenas pela presença ou ausência de regras, mas também pelo papel que as práticas de seguir essas regras desempenham na nossa vida. Regras que não desempenham nenhum papel nas nossas vidas não instituem práticas e, por isso, não instituem nenhum uso lingüístico. Dado que, para Wittgenstein, expressões que não possuem um uso não têm sentido, regras que não instituem usos lingüísticos não são capazes de tornar compreensíveis as expressões que são usadas de acordo com elas.

Wittgenstein se esforça para mostrar a diferença entre um cálculo e um experimento. O resultado de um experimento não possui nenhuma relação necessária com o próprio experimento. Não temos como provar qual é o resultado do experimento antes de realizá-lo. E não há nenhuma necessidade que a repetição de um experimento tenha o mesmo resultado. Não é necessário, por exemplo, que contemos quatro objetos após reunirmos dois conjuntos de dois objetos. Uma equação matemática como “2+2=4”, entretanto, não é uma previsão do resultado que encontraremos ao contarmos os elementos de um conjunto formado por dois conjuntos de dois objetos. Se contarmos 3, então, ou contamos de maneira errada ou algum objeto desapareceu durante a contagem. O resultado de um cálculo é um critério para se determinar se o cálculo foi realizado corretamente ou se nenhum evento físico inesperado aconteceu durante a contagem.

3.6 Contradição

Dado o caráter normativo das proposições matemáticas, um sistema de proposições matemáticas não deve ser avaliado quanto à sua capacidade de representar uma realidade independente. Dessa perspectiva, uma contradição dentro de um desses sistemas perde muito da importância que teria se esse sistema fosse uma teoria sobre uma realidade epistemicamente independente. Um sistema contraditório de proposições matemáticas pode ser extremamente útil. Se uma contradição for derivada do sistema, pode-se continuar a usá-lo depois de se estabelecer que nenhuma conclusão deve ser derivada da contradição (cf. *Observações Filosóficas*, p. 338, *Gramática Filosófica*, p. 303).

Wittgenstein argumentava que não faz sentido falar em contradições ocultas. Uma contradição desapercebida que pertence a um sistema seria uma que pode ser derivada por um método conhecido. Se não há tal método, não há nenhuma contradição. Se esse método é instituído, então a contradição é algo acrescentado ao sistema, e não algo descoberto. Por isso, não deveríamos temer contradições ocultas. Se nenhum método conhecido deriva uma contradição do sistema, isso significa que esse sistema está “funcionando”. Se Wittgenstein estava certo, parece que é um equívoco filosófico tentar provar a consistência de sistemas de proposições aritméticas. Sempre é possível elaborar métodos que possam acrescentar contradições a um sistema. A necessidade de provas de consistência surge de uma *falta de clareza* sobre a natureza da matemática e, portanto, somente pode ser afastada por meio de uma *análise*.

O problema, entretanto, reside nas contradições desapercebidas que podem ser derivadas de um sistema por um método conhecido. Se existem tais contradições, então podemos derivar inadvertidamente conclusões equivocadas ao aplicá-lo. Parece que pontes poderiam cair se calculássemos sua estrutura com uma aritmética contraditória. Wittgenstein, entretanto, insiste que pontes não caem por causa da contradição.

3.7 Quantificação e infinito

A diferença entre quantificações sobre domínios finitos e quantificações sobre domínios infinitos é expressa por Wittgenstein pela afirmação de que o infinito não é um número (*Observações Filosóficas*, pp. 157, 236). É natural pensar que o infinito é um número, pois “cinco” e “infinitos” podem ser respostas alternativas à pergunta: “Quantos?”. Para Wittgenstein, entretanto, a diferença entre uma classe finita e uma classe infinita não é que a última é maior que a primeira. Uma classe finita muito grande não está mais próxima do infinito do que uma classe pequena. A diferença entre uma classe finita e uma classe infinita é categorial. Se não fosse, a impossibilidade de contar os elementos de uma classe infinita seria devida a uma limitação “médica” (como dizia Russell) e não lógica. A infinidade matemática é dada pelas regras de construção das séries matemáticas. Ela é uma infinidade potencial de certas séries finitas (*Observações Filosóficas*, p. 164). A expressão “1, 2, 3, 4,…” não é a representação do começo de uma entidade infinita, mas é a formulação de uma regra. Diferentemente do modo de determinação do número de elementos de uma classe finita, apelamos para essa regra para justificar a afirmação de que a série dos números é infinita. É o uso baseado nesse apelo que dá significado à palavra “infinito”. A impossibilidade de se contar todos os elementos de uma classe infinita deveria ser expressa do seguinte modo: a expressão “contar todos os elementos de uma classe infinita” *não faz sentido*. Por tudo isso, é enganador expressar a generalidade matemática através da notação usada para expressar a generalidade não matemática (a dos *Principia Mathematica*, p.ex.). A generalidade matemática não é um produto lógico infinito, mas está relacionada à indução matemática, que não pode ser reduzida a noções puramente lógicas. A palavra “todo” não significa a mesma coisa quando usada em quantificações matemáticas e não matemáticas.

Alguns comentadores interpretam a negação do infinito atual como a expressão de Wittgenstein do seu comprometimento com o finitismo.

V. Resultados esperados

Espera-se poder interpretar corretamente e avaliar criticamente os principais pontos da filosofia da matemática de Wittgenstein, com uma ênfase especial na sua concepção de prova matemática. Pretende-se divulgar os resultados em colóquios e simpósios sobre o assunto, em artigos para revistas especializadas e em um livro, que terá um caráter introdutório.

VI. Bibliografia

AMBROSE, A. (1935) “Finitism in Mathematics I”. *Mind*, vol. 44, n. 174, pp. 186-203.
_____ (1935) “Finitism in Mathematics II”. *Mind*, vol. 44, n. 175, pp. 317-340.
_____ (1937) “Finitism and ‘The Limits of Empiricism’”. *Mind*, vol. 46, n. 183, pp. 379-385
_____ (1955) “Wittgenstein on Some Questions in Foundations of Mathematics” *The Journal of Philosophy*, 52, no 8, pp. 197-214.
_____ (1957) “Review of Remarks on the Foundations of Mathematics” *Philosophy and Phenomenological Research*, 18, no 2, pp. 262-265.
_____ (1959) “Proof and Theorem Proved” Mind 68, no 272, pp. 435-345.
_____ (1974) “Believing Necessary Propositions”. Mind, vol. 83, n. 330, pp. 286-290.
_____ (1982) “Wittgenstein and Mathematical Proof” Mind, 91, pp. 264-272.

BAKER G.P. & HACKER, P.M.S. (1976) "Review of *Philosophical Grammar*" *Mind*, 85, nº 338, pp. 269-294.

_____ & _____ (1992) *Wittgenstein: Rules, Grammar and Necessity*. vol. 2 of *an Analytical Commentary on the Philosophical Investigations*. Oxford: Blackwell.

BAKER, Gordon P. (1988) *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle*. Oxford: Basil Blackwell.

BARKER, Stephen. (1969) *Filosofia da Matemática*. Trad. L. Hegenberg e O.S. da Motta. Rio de Janeiro: Zahar.

BEANEY, Michael (ed.), (1997) *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell.

BENACERRAF, Paul & PUTNAM, Hilary (eds.). (1993) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press.

BLACK, M. (1958) "Necessary Statements and Rules". *The Philosophical Review*, vol. 67, n. 3, pp. 313-341.

BOSTOCK, D. (1988) "Necessary Truth and A Priori Truth". *Mind*, vol. 97, n. 387, pp. 343-379.

CASTAÑEDA, H.N. (1961) "On Mathematical Proofs and Meaning" *Mind*, vol. 70, n. 279, pp. 385-390.

CHIHARA, Charles. (1982) "The Wright-wing Defense of Wittgenstein's Philosophy of Logic" *The Philosophical Review*, 41, nº 1, pp. 99-108

_____ (1977) "Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes in his *Lectures on the Foundations of Mathematics*". *The Philosophical Review*,

COSTA, Newton C.A. (1977) *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. São Paulo: Hucitec.

COWAN, Joseph L. (19??) "Wittgenstein's Philosophy of Logic" *The Philosophical Review*, vol. 70, nº 3, pp. 362-375.

DEMOPOULOS, William (ed.). (1995) *Frege's Philsophy of Mathematics*. Cambridge (Massachussets): Harvard University Press.

DIAMOND, Cora. (1991) *The Realistic Spirit: Wittgenstein, Philosophy, and the Mind*. Cambridge (Massachusetts): The MIT Press.

DUMMETT, M. (1994) "What is Mathematics About?" in: George, Alexander (ed.). *Mathematics and Mind*. Oxford: Oxford University Press, pp. 11-26.

_____ (1993) "Wittgenstein on Necessity: Some Reflections". *in*: ____ *The Seas of Language*. Oxford, pp. 446-461.

DUTHIE, G. D. "Remarks on the Foundations of Mathematics" *The Philosophical Quarterly*, 7, nº 29 (1957), pp. 368-373.

FLOYD, Juliet. (2002) "Number and Ascription of Number in Wittgenstein's Tractatus" in: RECK, Erich H. (ed.) *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on Early Analytic Philosophy*. Oxford: Oxford University Press, pp. 308-352.

_____ (1991) "Wittgenstein on 2, 2, 2…: The Opening of *Remarks on the Foundations of Mathematics*". *Synthese*, 87, pp. 143-180.

_____ (1995) "On Saying What You Really Want To Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle" *in*: HINTIKKA, Jaakko (ed.). *Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, pp. 373-425.

FRASCOLLA, Pasquale. (1994) *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. London: Routledge.

FREGE, Gottlob. (2002) *Investigações Lógicas*. Trad. Paulo Alcoforado. Porto Alegre: EDIPUCRS.

_____ (1989) *The Foundations of Arithmetic*. Revised edition. John L. Austin (trans.). Oxford: Basil Blackwell.

GERRARD, Steve. (1996) "A Philosophy of Mathematics Between Two Camps" in: SLUGA, Hans & STERN, David G. *The Cambridge Companion to Wittgenstein*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 171-197.

GLOCK, Hans-Johann. (1996) “Necessity and Normativity”. SLUGA, Hans & STERN, David G. *The Cambridge Companion to Wittgenstein*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 198-225.

GOLDFARB, W. (1979) “Logic in the Twenties - The Nature of the Quantifier”. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 44, n. 3, pp. 351-368.

_____ (1982) “Logicism and Logical Truth”. *The Journal of Philosophy*, vol. 79, n. 11, pp. 692-695.

GOODSTEIN, R.L. (1957) “Remarks on the Foundations of Mathematics” *Mind*, 66, n^{o} 264, 249-253.

_____ (1939) “Mathematical Systems”, *Mind*, vol. 48, n. 189, pp. 58-73.

HARDY, G.H. (1929) “Mathematical Proof”, *Mind*, vol. 38, n. 149, pp. 1-25.

_____ (2000) *Em Defesa de Um Matemático*. Trad. Luis Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes.

HELLMAN, G. (1981) "How to Gödel a Frege-Russell: Gödel's Incompleteness Theorems and Logicism". *Nous*, vol. 15, n. 4, pp. 451-468.

HINTIKKA, J. (1970) "Information, Deduction, and the A Priori". *Nous*, vol. 4, n. 2, pp. 135-152.

JOSEPH, Marc A. (1998) “Wittgenstein’s Philosophy of Arithmetic”. *Dialogue*, 37, pp. 83-106.

KIELKOPFF, Charles. (1970) *Strict Finitism: An Examination of Ludwig Wittgenstein Remarks on the Foundations of Mathematics*. Paris: The Hague.

KLINE, Morris. (1994) *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*. III. Trad. A. Garciadiego e M. Martinez. Madrid: Alianza Universidad.

LAKATOS, Imre. (1976) *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. John Worrall e Elie Zahar (orgs.). Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

LAZEROWITZ, M. (1936) "Necessary and Contingent Truths". *The Philosophical Review*, vol. 45, n. 3, pp. 268-282.

LEAR, J. (1983) "Ethics, Mathematics and Relativism". *Mind*, vol. 92, n. 365, pp. 38-60.

LEVY, S.E. (1971) "Logical Impossibility". *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 32, n. 2, pp. 166-187.

LEWY, C. (1940) "Logical Necessity". *The Philosophical Review*, vol. 49, n. 1, pp. 62-68.

MADDY, P. (1998) "Naturalism and the A Priori". To appear in P. Boghossian and C. Peacocke. *A Priori Knowledge*.

_____ (1989) "The Roots of Contemporary Platonism". *Journal of Symbolic Logic*, vol. 54, n. 4, pp. 1121-1144.

_____ (1981) "Sets and Numbers". *Nous*, vol. 15, n. 4, pp. 495-511.

MALCOLM, N. (1940) "Are Necessary Propositions Really Verbal?". *Mind*, vol. 49, n. 194, pp. 189-203.

_____ (1940) "The Nature of Entailment". *Mind*, vol. 49, n. 195, pp. 333-347.

MARCONI, Diego. “How Many Multiplications Can We Do?” (Não Publicado)

MARION, Mathieu. (1998) *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

MOORE, A.W. (1993) *The Infinite*. London: Routledge.

NAGEL, Ernest & NEWMAN, James R. (1973) *Prova de Gödel*. Trad. Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva.

NERLICH, G. (1967) "'If You Can't Be Wrong, Then You Can't Be Right". *Philosophical Quarterly*, vol. 17, n. 69, pp. 300-307.

OLIVERI, G. (1997) “Mathematics. A Science of Patterns?” *Synthese*, vol. 112, pp. 379-402.

PLANTINGA, A. (1969) "De Re et De Dicto" *Nous*, vol. 3, n. 3, pp. 235-258.

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

POLLARD, Stephen. (1990) *Philosophical Introduction to Set Theory*. Notre Dame: University of Notre Dame Press.

PROOPS, Ian. (2002) “The Tractatus on Inference and Entailment”. in: RECK, Erich H. (ed.) *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on Early Analytic Philosophy*. Oxford: Oxford University Press, pp. 283-307.

PUTNAM, H. (1962) "It Ain't Necessarily So" *The Journal of Philosophy*, vol. 59, n. 22, pp. 658-671.

_____ (1967) “Mathematics without Foundations”. *The Journal of Philosophy*, vol. 64, n. 1, pp. 5-22.

_____ (2000) “Rethinking Mathematical Necessity”. CRAY, Alice & READ, Rupert (eds.). *The New Wittgenstein*. London: Routledge, pp. 218-231.

RAMSEY, Frank. P. (1950) *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*. R.B. Braithwaite (ed.). New York: The Humanities Press.

RHEES, R. (1996) *Discussions of Wittgenstein*. Bristol: Thoemmes Press.

RODYCH, V. (1999) “Wittgenstein's Inversion of Gödel's Theorem”, *Erkenntnis*, vol. 51, pp. 173-206.

_____ (2002) “Wittgenstein on Gödel: The Newly Published Remarks”, *Erkenntnis*, vol. 56, pp. 379-397.

ROTA, G.C. (1997) “The Phenomenology of Mathematical Proof”, *Synthese*, vol. 111, pp. 183-196.

RUSSELL, Bertrand. (1948) *Los Principios de la Matemática*. Trad. J.C. Grimberg. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

_____ (1993) *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Routledge.

SAYWARD, C. (1990) “Four Views of Arithmetical Truth”, Philosophical Quarterly, vol. 40. n. 159, pp. 15-168.

SHANKER, S.G. (ed.) (s.d.) *Gödel’s Theorem in Focus*. London: Routledge.

_____ (1987) *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. New York: State University of New York Press, 1987.

SHAPIRO, Stweart. (2000) *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

SKOLEM, T. (1954) “Review of Kreisel’s Some Remarks on the Foundations of Mathematics. An Expository Article”. *Journal of Symbolic Logic*, vol 19, n. 1, pp. 60-61.

SOAMES, S. (1983) “Generality, Truth-Functions and Expressive Capacity in the Tractatus”. *The Philosophical Review*, vol. 92. n. 4, pp. 573-589.

STROUD, Barry. (1966) “Wittgenstein and Logical Necessity”. *in*: Gorge Pitcher (ed.). *Wittgenstein: The Philosophical Investigations. A Collection of Critical Essays*. Garden City (NY): Anchor Books, pp. 477-498. Reimpresso *in*: _____ (2000) *Meaning, Understanding, and Practice*. Oxford: Oxford University Press, pp. 1-16.AMBROSE, A. (1935) “Finitism in Mathematics I”. *Mind*, vol. 44, n. 174, pp. 379-385

TAIT, W. (1981) “Finitism”, *The Journal of Philosophy*, vol. 78, n. 9, pp. 524-546.

_____ (1998) “Remarks on Finitism”. Meeting of the Association for Symbolic Logic.

TYMOCZKO, T. (1998) “Gödel and the Concept of Meaning in Mathematics”, *Synthese*, vol. 114, pp. 25-40.

VAN FRASSEN, B.C. (1977) "The Only Necessity is Verbal Necessity". The Journal of Philosophy, vol. 74, n. 2, pp. 71-85.

WANG, Hao. “To and From Philosophy – Discussions with Gödel and Wittgenstein”, *Synthese*, vol 88, n. 2, pp. 229-277.

WITGENSTEIN, Ludwig. (1922) *Tractatus Logico-Philosophicus*. C.K. Ogden (trad.). London: Routledge & Kegan Paul. [(1994) Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EDUSP.]

_____ (1958) *Philosophical Investigations*. Anscombe, G.E.M. & Rhees, Rush (eds.), Anscombe, G.E.M. (trad.). Oxford: Blackwell.

_____ (1974) *Philosophical Grammar*. Ed. Rhees, Rush. trad. Kenny A. Berkeley & Los Angeles: University of California Press.

_____ (1975) *Lectures on the Foundations of Mathematics*. From the notes of Bosanquet, R.G.; Malcolm, Norman; Rhees, Rush & Smythies, Yorick. Diamond, Cora (ed.). Chicago: University of Chicago Press.

_____ (1975) *Philosophical Remarks*. Rhees, Rush (ed.). Hargreaves, Raymond & White, Roger (trad.). Chicago: Chicago University Press.

_____ (1996) *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Revised edition. Wright, G.H. & Rhees, R. & Anscombe, G.E.M. (eds.). Anscombe, G.E.M. (trad.). Cambridge-MA: The MIT Press.

WRIGHT, Crispin. (1980) *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Hampshire: Gregg Revivals.

_____ (1993) *Realism, Meaning and Truth*. Oxford: Blackwell.

_____ (2001) *Rails to Infinity: Essays on Themes from Wittgenstein's Philosophical Investigations*. Cambridge: Harvard University Press.

WRIGLEY, Michael. (1977) "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" *The Philosophical Quarterly*, Vol. 27, n. 106. pp. 50-59.

ZALTA, E. (1985) "Logic and Analytical Truths That Are Not Necessary". Não publicado.

2. Anexos

Nesta seção deve-se incluir os documentos descritos em "Requisitos/Características Necessárias" no Formulário de Propostas de acordo com a modalidade selecionada.

Obs: Uma cópia impressa e assinada da declaração abaixo será enviada por correio normal nos próximos dias.

Porto Alegre, 30 de fevereiro de 2004

Ao
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq

Prezados Senhores,

Com a presente, vimos manifestar a esse Conselho o interesse deste Programa de Pós-Graduação na concessão de Bolsa de Pesquisa, na modalidade Pós-Doutorado (substitutiva da antiga Bolsa de Recém-Doutor) ao candidato ALEXANDRE NORONHA MACHADO, com vistas ao desenvolvimento junto a este Programa do projeto de pesquisa *Wittgenstein e a Natureza da Prova Matemática*.

O candidato desenvolverá seu projeto de pesquisa em colaboração com o Prof. Dr. PAULO FRANCISCO ESTRELLA FARIA, especialista na filosofia de Wittgenstein e responsável pela orientação de sua tese de doutorado *Lógica e Forma de Vida*, que aborda a concepção wittgensteiniana da necessidade lógica. O projeto ora submetido à aprovação do CNPq é uma extensão natural daquele trabalho, em uma área ainda insuficientemente explorada da filosofia de Wittgenstein.

As contribuições de Wittgenstein à filosofia da matemática são até hoje, mais de meio século após a morte do filósofo austríaco, a parte menos conhecida e estudada de seu legado intelectual – sem embargo de que Wittgenstein tenha, como é notório, pensado e escrito mais sobre matemática que sobre qualquer outro assunto ao longo de toda sua carreira: mais de metade dos documentos que constituem o *Nachlass* do filósofo dela se ocupam. No centro dessas reflexões está a investigação do conceito de prova matemática, de que se ocupa o projeto de pesquisa de Alexandre Machado.

É lícito esperar do desenvolvimento desse projeto uma contribuição significativa ao desenvolvimento de uma linha de pesquisa que, no Brasil, recém começa a ser explorada nos trabalhos pioneiros dos professores Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira, da UFRJ e da PUC/RJ, João Vergilio Gallerani Cuter, da USP e André da Silva Porto, da UFGO – e, com ela, uma renovação dos estudos wittgensteinianos no Departamento e no Programa de Pós-Graduação em Filosofia desta Universidade.

Certos de podermos contar com o apoio desse Conselho, subscrevemo-nos

Cordialmente,

GERSON LUIZ LOUZADO
Coordenador do Programa de Pós-Graduação